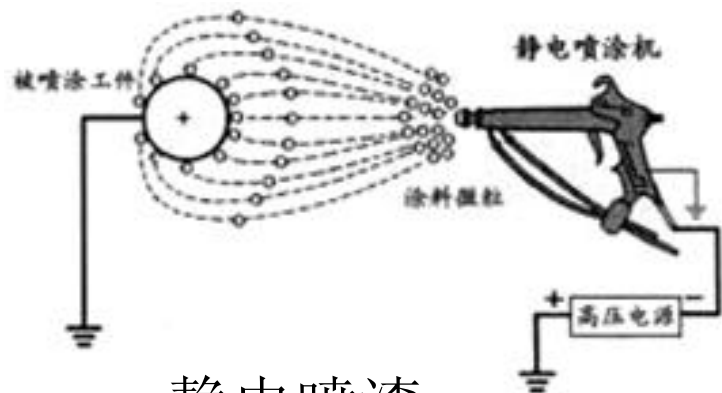


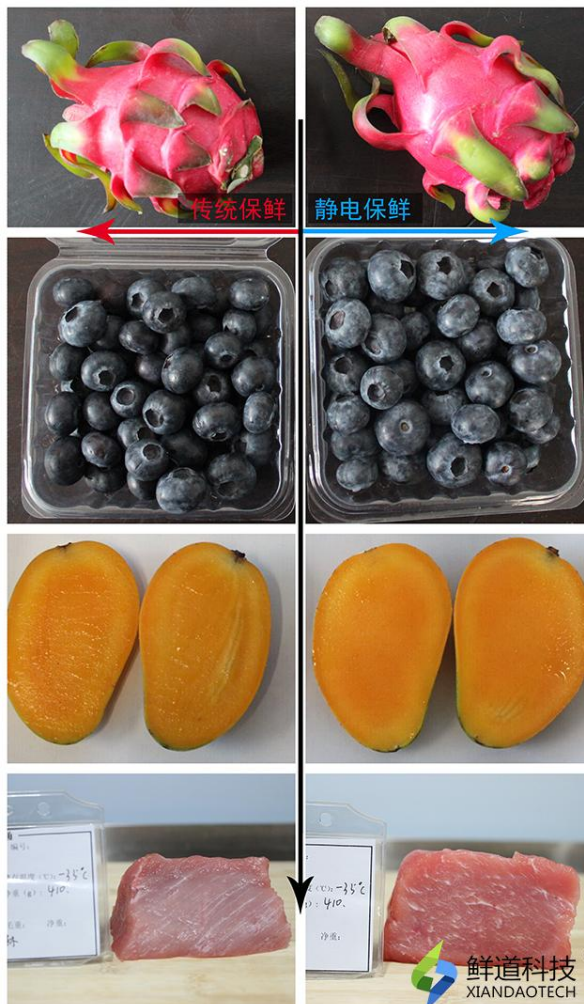
# 第二章 静电场



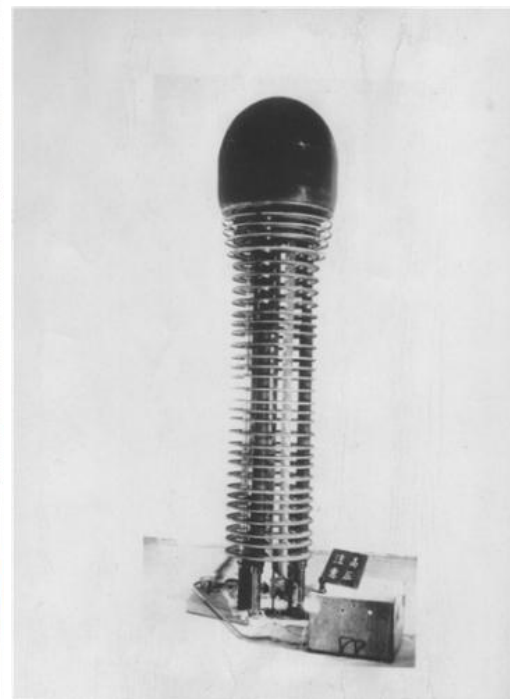
静电喷漆



静电撒粉机



静电保鲜



静电加速器



## 目录:

- §2.1 真空中静电场的基本定律
- §2.2 静电场的电位
- §2.3 静电场问题求解方法概述
- §2.4 电位的多极展开
- §2.5 存在介质时静电场的基本定律
- §2.6 静电场中的导体
- §2.7 静电场的能量

# § 2.1 真空中静电场的基本定律

## 一、库仑定律与电场强度

库仑定律：描述二个点电荷之间的相互作用力。

地位：静电场的基础。

电场强度：单位试验电荷所受的作用力。

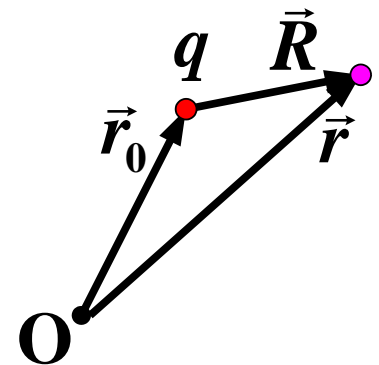
点电荷  $q$  的电场强度：

$$\vec{E} = \frac{q\vec{R}}{4\pi\epsilon_0 R^3} = \frac{q(\vec{r} - \vec{r}_0)}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_0|^3}$$

单位： $q$  — 库仑 (C)；

$\epsilon_0 = (1/36\pi) \times 10^{-9}$  法拉/米 (F/m)；

$\vec{E}$  — 牛顿/库仑 (N/C) 或伏特/米 (V/m)。

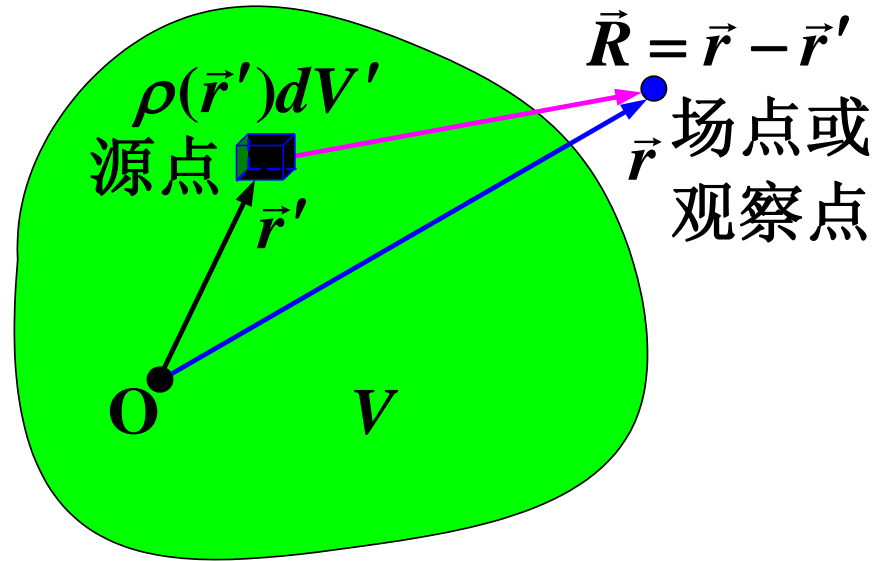


# § 2.1 真空中静电场的基本定律

力满足迭加原理  $\longrightarrow$  电场强度满足迭加原理

体电荷分布:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')\vec{R}}{R^3} dV'$$



$\vec{r}'$ : 源点的位置矢量;

$\vec{r}$ : 场点或观察点的位置矢量;

$\vec{R}$ : 相对位置矢量,  $\hat{R} = \vec{R}/R$ ;

$\rho(\vec{r})$ : 体电荷密度, 库仑/米<sup>3</sup>, C/m<sup>3</sup>.

## § 2.1 真空中静电场的基本定律

面电荷分布:  $\rho(\vec{r}')dV' \rightarrow \rho_s(\vec{r}')dS'$ ,  $\int_V \rightarrow \int_S$

$\rho_s(\vec{r})$ : 面电荷密度, 库仑/米<sup>2</sup>, C/m<sup>2</sup>。

线电荷分布:  $\rho(\vec{r}')dV' \rightarrow \rho_\ell(\vec{r}')dl'$ ,  $\int_V \rightarrow \int_\ell$

$\rho_\ell(\vec{r})$ : 线电荷密度, 库仑/米, C/m。

点电荷分布可用体电荷密度、面电荷密度或线电荷密度表示。

【例】:  $\rho(\vec{r}) = q\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$

【验证】: 1)  $\vec{r} \neq \vec{r}_0$ ; 2)  $\vec{r} = \vec{r}_0$ ; 3)  $\int_{V(\vec{r}_0 \in V)} \rho(\vec{r})dV = q$ 。

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{q\delta(\vec{r}' - \vec{r}_0)(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV' = \frac{q(\vec{r} - \vec{r}_0)}{4\pi\epsilon_0|\vec{r} - \vec{r}_0|^3}$$

## § 2.1 真空中静电场的基本定律

电荷分布在有限区域时，场的远区特性：

远区： $\vec{r} \rightarrow \infty$  或者： $\vec{r}$  有限，但  $\vec{r}' \rightarrow 0$

零级近似： $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}' \approx \vec{r}$

$$\vec{E} = \frac{\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \int_V \rho(\vec{r}') dV' + O\left(\frac{1}{r^3}\right) = \frac{Q\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} + O\left(\frac{1}{r^3}\right)$$

零级近似的物理含义：当电荷分布在有限空间且观察点趋向于无限远时，可以忽略电荷分布的几何尺寸，将体分布（或面分布、线分布）的电荷看作一个点电荷。

# § 2.1 真空中静电场的基本定律

## 二、静电场的基本方程

微分形式:  $\nabla \cdot \vec{E} = \rho / \epsilon_0$  静电场的散度方程

$\nabla \times \vec{E} = 0$  静电场的旋度方程

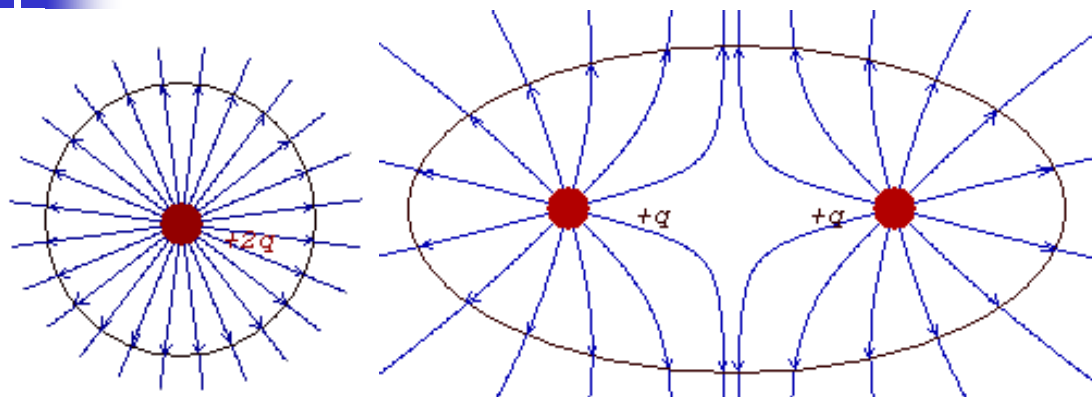
积分形式:  $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = Q / \epsilon_0$  静电场的高斯定理

$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$  静电场的环路定理

( $Q = \int_V \rho dV$  为  $S$  内的总电荷量)

静电场是无旋场，没有漩涡源，而只有通量源即电荷分布。电力线从正电荷（或无限远处）发出，终止于负电荷（或无限远处）。在没有电荷的区域，电力线是连续的。

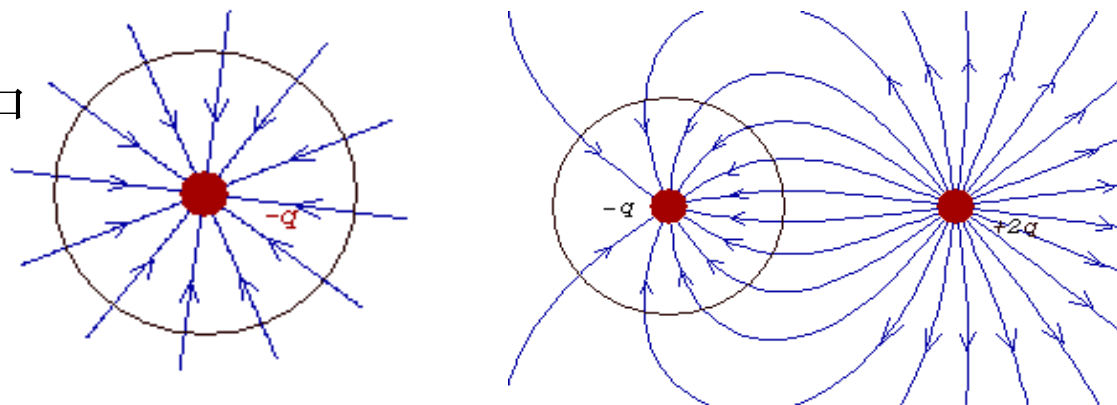
# § 2.1 真空中静电场的基本定律



闭合曲面的电通量

$E$ 的通量仅与  
闭合面 $S$ 所包围的  
净电荷有关。

$S$ 面上的 $E$ 是由系统中  
全部电荷产生的。



闭合面外的电荷对场的影响



## § 2.2 静电场的电位

### 一、静电场的电位表示

静电场为无旋场，因而其电场强度可用一标量函数的梯度来表示。即：

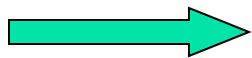
$$\vec{E} = -\nabla \varphi$$

**电位的定义：**

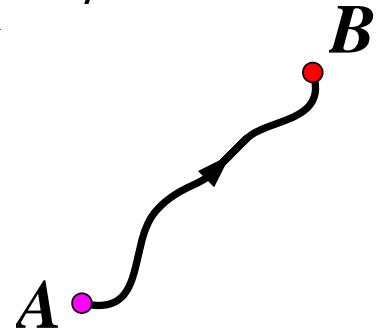
任意  $A$  和  $B$  两点的电位降定义为将单位试验电荷从  $A$  点移到  $B$  点电场力所作的功。

$$A \text{ 和 } B \text{ 两点的电位降} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\int_A^B \nabla \varphi \cdot d\vec{\ell}$$

$$= -\int_A^B \frac{\partial \varphi}{\partial \ell} d\ell = -\int_A^B d\varphi = \varphi_A - \varphi_B$$



**$\varphi$  即为电位。**



## § 2.2 静电场的电位

### 电位能或势能:

任意  $A$  和  $B$  两点的电位能减少  $W_A - W_B$  定义为将试验电荷  $q$  从  $A$  点移到  $B$  点电场力所作的功。即:

$$W_A - W_B = \int_A^B q\vec{E} \cdot d\vec{\ell} = q(\varphi_A - \varphi_B)$$

### 性质:

- 1) 电场强度垂直于等位面, 且指向电位下降的方向。
- 2) 当电荷分布有限区域时, 可选  $\varphi|_{\infty} = 0$ 。此时, 任意点的电位等于将单位试验电荷从该点移至无限远处电场力所作的功, 任意点的电位能或势能为将试验电荷  $q$  从该点移至无限远处电场力所作的功。

## § 2.2 静电场的电位

备注：当电荷分布至无限远时，不可选  $\varphi|_{\infty} = 0$ 。

### 二、泊松方程和拉普拉斯方程

$$\nabla^2 \varphi = -\rho / \varepsilon_0 \quad \text{泊松(Poisson)方程}$$

特别，若  $\rho=0$ ，则

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad \text{拉普拉斯(Laplace)方程}$$

### 三、泊松方程的形式解与电位表达式

#### ① 泊松方程的形式解

## § 2.2 静电场的电位

第二标量格林定理:

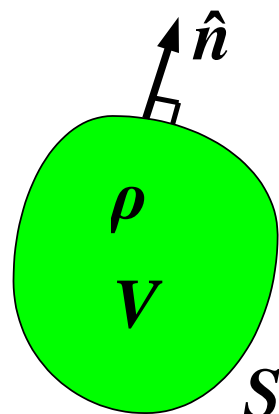
$$\int_V (\psi \nabla'^2 \varphi - \varphi \nabla'^2 \psi) dV' = \oint_S \left( \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n'} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n'} \right) dS'$$

选:  $\varphi$  为待求电位,  $\nabla'^2 \varphi(\vec{r}') = -\rho(\vec{r}') / \epsilon_0$

$$\psi = \frac{1}{4\pi R}, \quad \vec{r} \in V, \quad \nabla'^2 \psi(\vec{r}', \vec{r}) = -\delta(\vec{r}' - \vec{r})$$

$$\rightarrow \int_V \left\{ \frac{1}{4\pi R} \frac{-\rho(\vec{r}')}{\epsilon_0} + \varphi(\vec{r}') \delta(\vec{r}' - \vec{r}) \right\} dV'$$

$$= \oint_S \left\{ \frac{1}{4\pi R} \frac{\partial \varphi(\vec{r}')}{\partial n'} - \varphi(\vec{r}') \frac{\partial}{\partial n'} \left( \frac{1}{4\pi R} \right) \right\} dS'$$



## § 2.2 静电场的电位

泊松方程形式解：

$$\begin{aligned} \longrightarrow \varphi(\vec{r}) = & \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{R} dV' \\ & + \frac{1}{4\pi} \oint_S \left\{ \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi(\vec{r}')}{\partial n'} - \varphi(\vec{r}') \frac{\partial}{\partial n'} \left( \frac{1}{R} \right) \right\} dS' \end{aligned}$$

**物理意义与等效思想：**

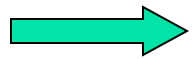
为何称为形式解？

### ② 电位表达式

$V$  为无限大空间，电荷分布有限空间，选  $\varphi|_{\infty} = 0$ 。

## § 2.2 静电场的电位

验证:  $S \rightarrow \infty$  时,  $\oint_S \left\{ \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi(\vec{r}')}{\partial n'} - \varphi(\vec{r}') \frac{\partial}{\partial n'} \left( \frac{1}{R} \right) \right\} dS' \rightarrow 0$



$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{R} dV'$$

面电荷分布:  $\rho(\vec{r}')dV' \rightarrow \rho_s(\vec{r}')dS'$ ,  $\int_V \rightarrow \int_S$

线电荷分布:  $\rho(\vec{r}')dV' \rightarrow \rho_\ell(\vec{r}')d\ell'$ ,  $\int_V \rightarrow \int_\ell$

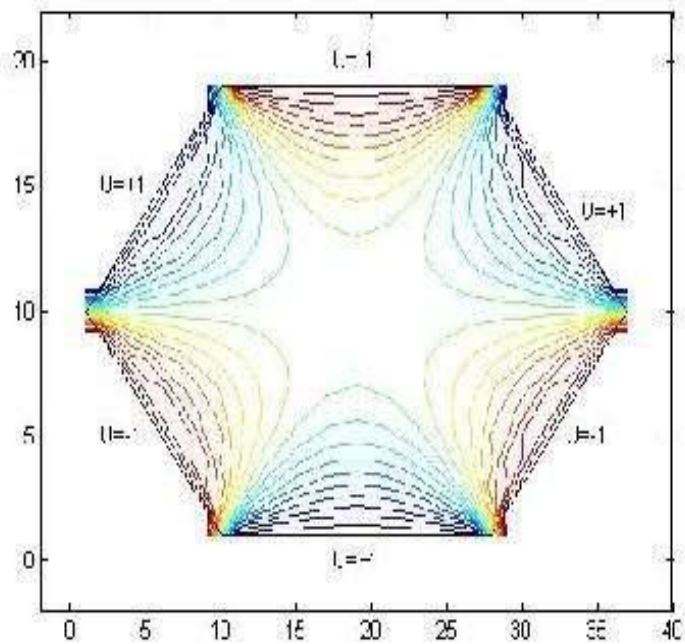
场的远区特性:

零级近似:  $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}' \approx \vec{r}$

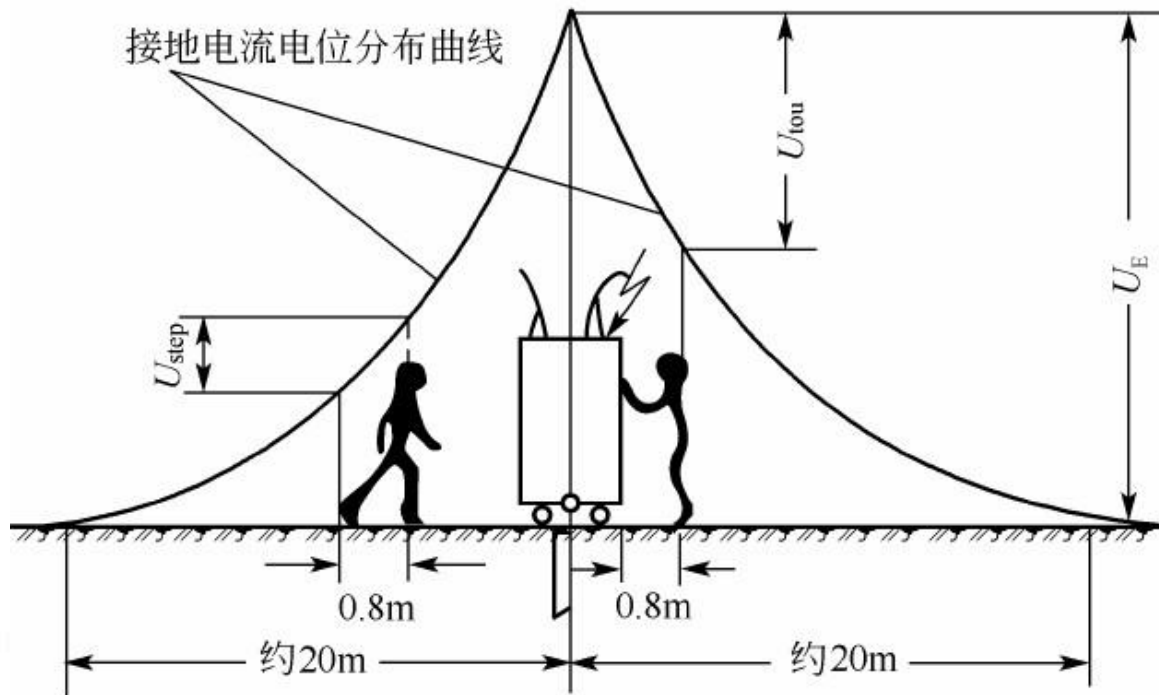
$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \int_V \rho(\vec{r}')dV' + O\left(\frac{1}{r^2}\right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + O\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

零级近似的物理含义:

## § 2.2 静电场的电位



六边形电位分布



接地故障电位分布

## § 2.3 静电场问题求解方法概述

一、直接积分法：由电荷分布直接积分求场。

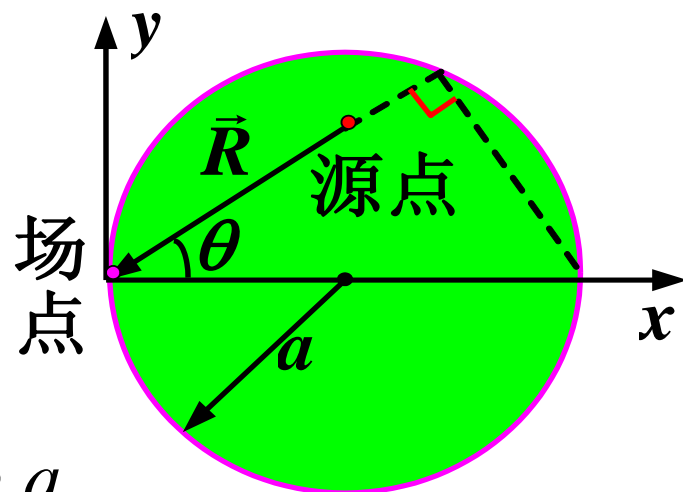
【例】（p. 34, 例 2-4）：有一半径为  $a$ ，面电荷密度为  $\rho_s$  的均匀带电圆盘，求圆盘边缘上任一点的电位。

【解】：选观察点为坐标原点。

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\rho_s dS'}{R}$$

$$= \frac{\rho_s}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{RdRd\theta}{R}$$

$$= \frac{\rho_s}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^{2a \cos \theta} dR = \frac{\rho_s a}{\pi\epsilon_0}$$





## § 2.3 静电场问题求解方法概述

### 二、高斯定理（+迭加原理）

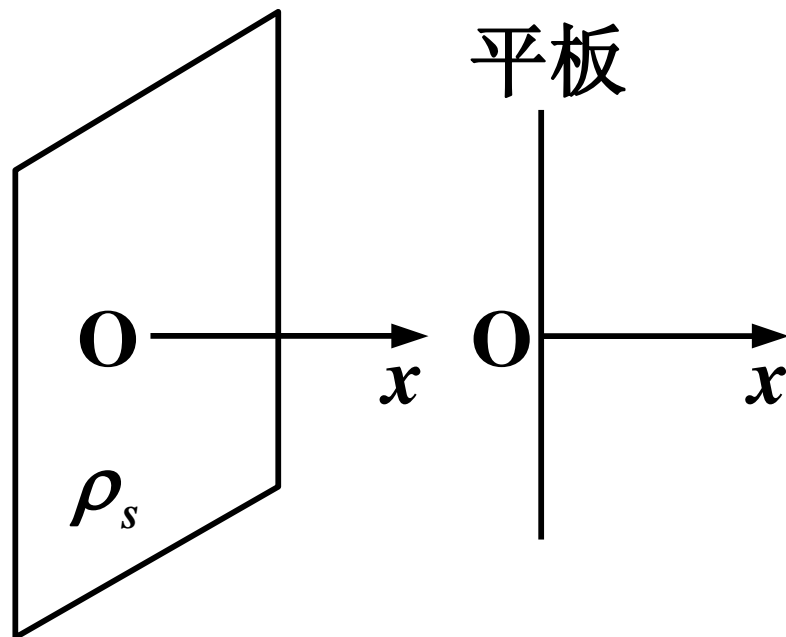
#### ① 平板形电荷分布

【例】：无限大无限薄平板电荷分布。

分析可知： $\vec{E} = E\hat{x}$

由高斯定理可得：

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \hat{x}, & x > 0 \\ -\frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \hat{x}, & x < 0 \end{cases}$$



对多个无限大无限薄平板，可应用迭加原理。

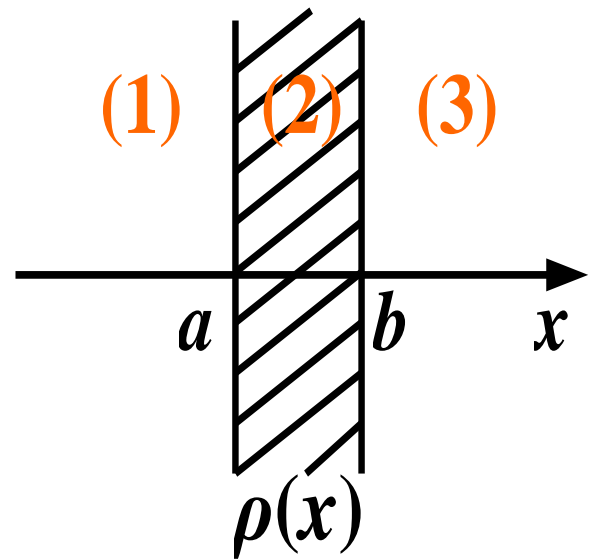
【例】：体电荷密度为  $\rho(x)$ 、厚度为  $d$  的无限大平板电荷分布

(3)区： 
$$E = \int_a^b \frac{\rho dx'}{2\varepsilon_0} = \frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}。$$

其中， 
$$\rho_s = \int_a^b \rho(x') dx'。$$

(1)区： 
$$E = \int_a^{b-x} \frac{\rho dx'}{2\varepsilon_0} = -\frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}$$

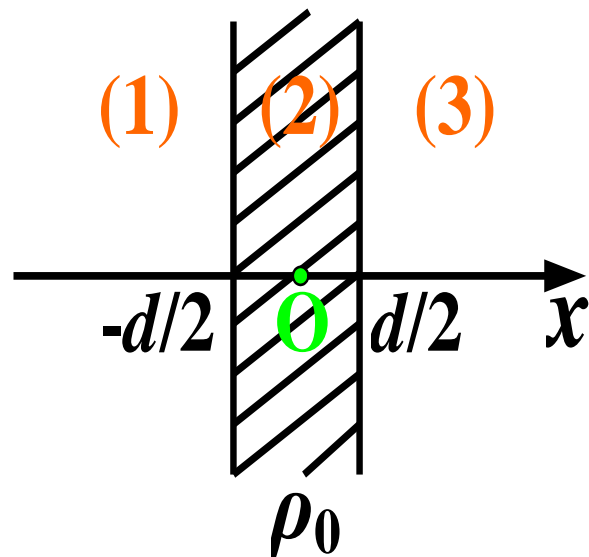
(2)区： 
$$E = \int_a^x \frac{\rho dx'}{2\varepsilon_0} + \int_x^{b-x} \frac{-\rho dx'}{2\varepsilon_0} = \frac{1}{2\varepsilon_0} \left\{ \int_a^x \rho dx' - \int_x^b \rho dx' \right\}$$



可见：(3)区和(1)区的场等同于面电荷密度为  $\rho_s$  的无限大无限薄平板产生的场。在  $x \rightarrow \pm\infty$  的远区更是如此。若  $\rho(x)$  反对称，则(3)区和(1)区的场为零。

【例】 (p. 46, 例 2-5):  $\rho = \rho_0$ , 求电

场强度和电位。



$$\vec{E} = E\hat{x}, \quad \rho_s = \rho_0 d$$

$$(3)\text{区}: E = \frac{\rho_0 d}{2\epsilon_0}. \quad (1)\text{区}: E = -\frac{\rho_0 d}{2\epsilon_0}$$

$$(2)\text{区}: E = \frac{1}{2\epsilon_0} \left\{ \rho_0 \left( x + \frac{d}{2} \right) - \rho_0 \left( \frac{d}{2} - x \right) \right\} = \frac{\rho_0 x}{\epsilon_0}$$

选坐标原点为电位零点。等位面:  $x = \text{常数}$ 。

$$(2)\text{区}: \varphi(x) = \varphi(x) - \varphi(0) = \int_x^0 \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\int_0^x \frac{\rho_0 x}{\epsilon_0} dx = -\frac{\rho_0 x^2}{2\epsilon_0}$$

$$(3)\text{区}: \varphi(x) = \varphi\left(\frac{d}{2}\right) + \int_x^{\frac{d}{2}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{\rho_0 d^2}{8\epsilon_0} - \int_{\frac{d}{2}}^x \frac{\rho_0 d}{2\epsilon_0} dx = -\frac{\rho_0 d}{2\epsilon_0} x + \frac{\rho_0 d^2}{8\epsilon_0}$$

$$(1)\text{区}: \varphi(x) = \varphi\left(-\frac{d}{2}\right) + \int_x^{-\frac{d}{2}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{\rho_0 d^2}{8\epsilon_0} + \int_x^{-\frac{d}{2}} \frac{\rho_0 d}{\epsilon_0} dx = \frac{\rho_0 d}{2\epsilon_0} x + \frac{\rho_0 d^2}{8\epsilon_0}$$

## § 2.3 静电场问题求解方法概述

### ② 柱形电荷分布

$$\rho = \rho(\vec{r}) = \rho(x, y)$$

无限长线电荷分布  $\rho_l$  :

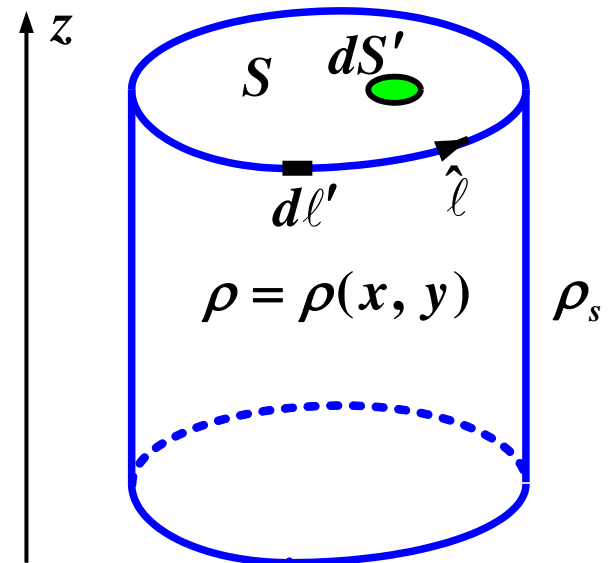
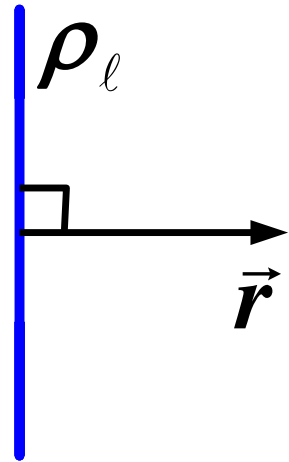
$$\vec{E} = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{r}$$

无限长柱形体电荷分布  $\rho$  :

$$\vec{E} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\rho \hat{R}}{R} dS', \quad \vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$$

无限长柱形面电荷分布  $\rho_s$  :

$$\rho dS' \rightarrow \rho_s dl', \quad \int_S \rightarrow \int_\ell$$



## § 2.3 静电场问题求解方法概述

场的远区特性:

电荷分布横向尺寸有限,  $\vec{r} \rightarrow \infty$

零级近似:  $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}' \approx \vec{r}$

$$\vec{E} = \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{r} + O\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

其中,  $\rho_\ell = \int_S \rho dS'$  或  $\rho_\ell = \int_\ell \rho_s dl'$

零级近似的物理意义:

### ③ 球形电荷分布

## § 2.3 静电场问题求解方法概述

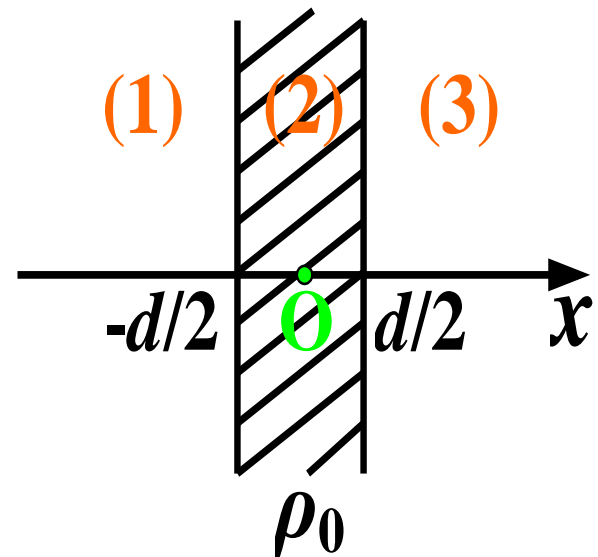
### 三、解泊松方程

【例】 (p. 46, 例 2-5):  $\rho = \rho_0$ , 求场。

$$(1) \text{区: } \nabla^2 \varphi_1 = \frac{d^2 \varphi_1}{dx^2} = 0$$

$$(2) \text{区: } \nabla^2 \varphi_2 = \frac{d^2 \varphi_2}{dx^2} = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}$$

$$(3) \text{区: } \nabla^2 \varphi_3 = \frac{d^2 \varphi_3}{dx^2} = 0$$



通解:

$$\varphi_1 = A_1 x + B_1, \quad \varphi_2 = -\frac{\rho_0}{2\varepsilon_0} x^2 + A_2 x + B_2, \quad \varphi_3 = A_3 x + B_3$$

## § 2.3 静电场问题求解方法概述

由

$x = \pm d/2$  时,  $\varphi$  和  $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$  连续;

选电位零点:  $x=0, \varphi=0$

$$\varphi_1 = \frac{\rho_0 d}{2\epsilon_0} x + \frac{\rho_0 d^2}{8\epsilon_0} + A_2 x$$

$$\vec{E}_1 = -\frac{\rho_0 d}{2\epsilon_0} \hat{x} - A_2 \hat{x}$$

$$\varphi_2 = -\frac{\rho_0}{2\epsilon_0} x^2 + A_2 x$$

$$\vec{E}_2 = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} x \hat{x} - A_2 \hat{x}$$

$$\varphi_3 = -\frac{\rho_0 d}{2\epsilon_0} x + \frac{\rho_0 d^2}{8\epsilon_0} + A_2 x$$

$$\vec{E}_3 = \frac{\rho_0 d}{2\epsilon_0} \hat{x} - A_2 \hat{x}$$



解为何不唯一 **?** 书中利用对称性, 如电荷分布不对称, 又如何处理 **?**

## § 2.3 静电场问题求解方法概述

系数为  $A_2$  的那些解的含义： $V$  外及边界上电荷分布产生的场对  $V$  内场的影响。

对平板形电荷分布，无限远处的边界条件为：

物理表述：无限远处的场仅由平板形电荷分布产生

数学表述： $x \rightarrow \pm\infty$  时， $\vec{E} \rightarrow \pm \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \hat{x}$

由此得： $A_2=0$

本例可利用电位的对称性：

$$\varphi(x) = \varphi(-x) \Rightarrow \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{x=0} = 0$$

此处理方法的局限性：



## § 2.3 静电场问题求解方法概述

问题的根源：未写出并利用整个求解区域边界 ( $x \rightarrow \pm\infty$ ) 的边界条件！

解的唯一性问题：

当电荷分布在有限区域时，选  $\varphi|_{\infty} = 0$ ，则既选定了电位零点，又给出了无限远处的边界条件：无限远处没有电荷分布或电荷分布贡献为零。

当电荷分布至无限远处时，除选定电位零点外，必须根据所求解的具体问题给出无限远处的边界条件。



## § 2.4 电位的多极展开

研究电荷分布在有限区域时，电位的泰勒展开及远区特性。

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{R} dV'$$

$$f(\vec{r} - \vec{r}') = f(\vec{r}) - (\vec{r}' \cdot \nabla) f(\vec{r}) + \frac{1}{2} (\vec{r}' \cdot \nabla)^2 f(\vec{r}) + \dots$$

$$\text{令 } f(\vec{r}) = \frac{1}{r}, \quad f(\vec{r} - \vec{r}') = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$\longrightarrow \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} - (\vec{r}' \cdot \nabla) \frac{1}{r} + \frac{1}{2} (\vec{r}' \cdot \nabla)^2 \frac{1}{r} + \dots$$

## § 2.4 电位的多极展开

### 一、单极项 $\varphi_m$ (零级近似)

monopole

$$\varphi_m = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \int_V \rho(\vec{r}') dV' = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \sim \frac{1}{r},$$

$$\vec{E}_m \sim \frac{1}{r^2}$$

### 二、偶极项 $\varphi_d$ (一级近似)

dipole

$$\varphi_d = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}') (\vec{r}' \cdot \nabla) \frac{1}{r} dV' = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sim \frac{1}{r^2}, \quad \vec{E}_d \sim \frac{1}{r^3}$$

其中,  $\vec{p} = \int_V \rho(\vec{r}') \vec{r}' dV'$  称为电荷分布的**电偶极矩**。

**电偶极子**: 具有电偶极矩且产生的电位如上的电荷分布。

## § 2.4 电位的多极展开

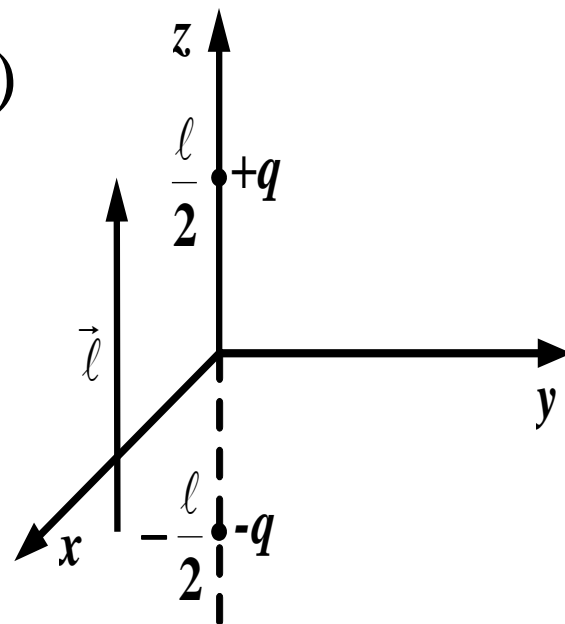
电偶极子的物理模型:

$$\rho(\vec{r}) = q\delta(x, y, z - \frac{\ell}{2}) - q\delta(x, y, z + \frac{\ell}{2})$$

$$Q=0, \quad \varphi_m = 0$$

$$\vec{p} = \int_V \rho(\vec{r})\vec{r}dV$$

$$= q\frac{\ell}{2}\hat{z} - q(-\frac{\ell}{2}\hat{z}) = q\ell\hat{z} = q\vec{\ell}$$



此电荷分布成为电偶极子的条件:

- 1)  $\vec{r} \rightarrow \infty$ , 即仅考虑其远区场, 此时高阶项可忽略。
- 或者: 2)  $\ell \rightarrow 0, q \rightarrow \infty$ , 但  $q\ell \rightarrow p$ , 而  $p$  是不为零的常数。此时观察点不必在远区。

为何可将此分布作为电偶极子的模型?

## § 2.4 电位的多极展开

### 三、四极项 $\varphi_q$ (二级近似)

quadrupole

$$\varphi_q = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}') (\vec{r}' \cdot \nabla)^2 \frac{1}{r} dV'$$

$$\text{可证: } (\vec{r}' \cdot \nabla)^2 \frac{1}{r} = \sum_{i,j=1}^3 \{3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}\} \frac{x_i x_j}{r^5}$$

其中,  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$ ,  $x_3 = z$ 。

$$\varphi_q = \frac{1}{8\pi\epsilon_0 r^3} \sum_{i,j=1}^3 Q_{ij} \frac{x_i x_j}{r^2} \sim \frac{1}{r^3}, \quad \vec{E}_q \sim \frac{1}{r^4}$$

其中,  $Q_{ij} = \int_V (3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}) \rho(\vec{r}') dV'$ ,

称为电荷分布的**电四极矩张量**的分量。

## § 2.4 电位的多极展开

性质:

1)  $Q_{ij}=Q_{ji}$ , 即 $[Q_{ij}]$ 为对称张量;

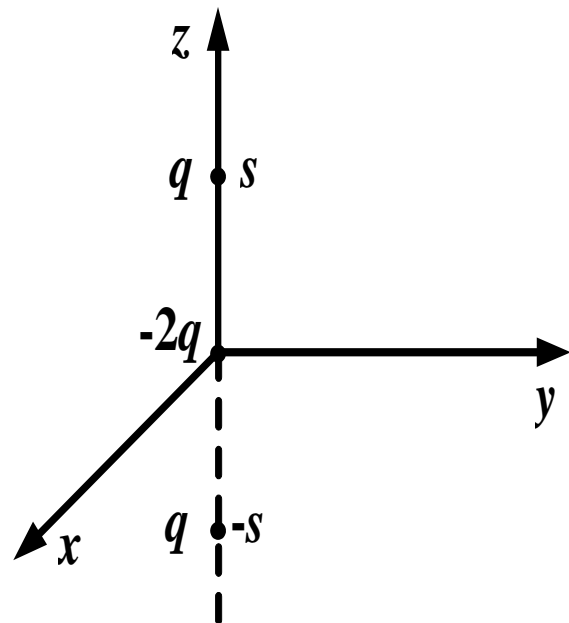
2)  $Q_{11}+Q_{22}+Q_{33}=0$ 。

→  $[Q_{ij}]$ 仅有 5 个独立分量。

【例】(p. 53): 求 $[Q_{ij}]$ 及  $\varphi_q$ 。

$$\varphi_m = \varphi_d = 0$$

$$\begin{aligned}\rho(\vec{r}) = & q\delta(x, y, z-s) \\ & -2q\delta(x, y, z) \\ & + q\delta(x, y, z+s)\end{aligned}$$



## § 2.4 电位的多极展开

$$Q_{ij} = \int_V (3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}) \rho(\vec{r}) dV = q(3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}) \Big|_{(0,0,s)} \\ - 2q(3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}) \Big|_{(0,0,0)} + q(3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}) \Big|_{(0,0,-s)}$$

非对角元素:

$$Q_{xy} = Q_{yz} = Q_{zx} = 0$$

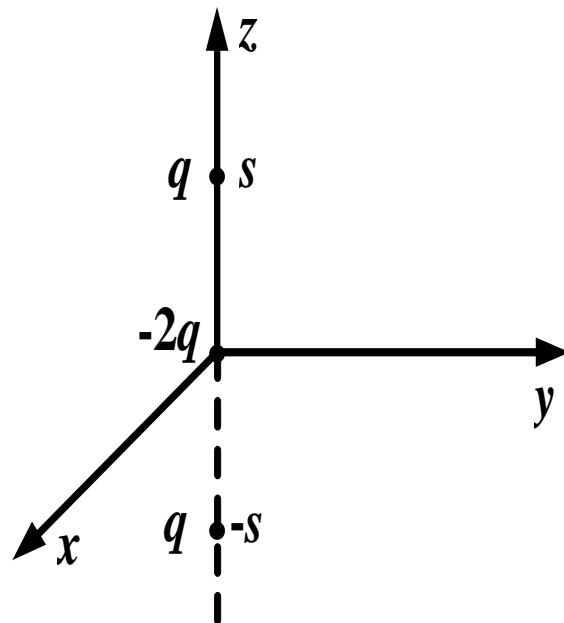
$$Q_{yx} = Q_{zy} = Q_{xz} = 0$$

对角元素:

$$Q_{xx} = Q_{yy} = -2qs^2$$

$$Q_{zz} = 4qs^2$$

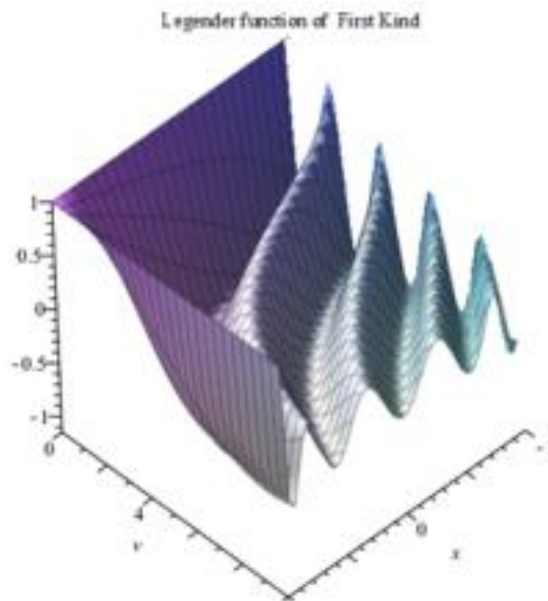
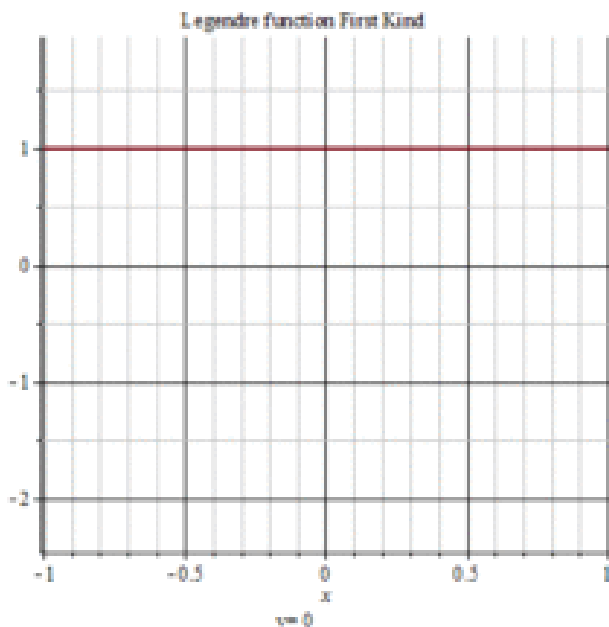
$$\varphi_q = \frac{1}{8\pi\epsilon_0 r^3} \left\{ -2qs^2 + 6qs^2 \frac{z^2}{r^2} \right\} = \frac{qs^2 (3\cos^2 \theta - 1)}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$



## § 2.4 电位的多极展开

### 四、说明

1、多极矩的大小通常与坐标原点的选择有关，从而其产生的电位或者展开精度与原点的选择有关。一般应将原点选择在“几何中心”。







## § 2.4 电位的多极展开

- 2、在某些特定情况下，多极矩与坐标原点的选择无关。
  - 1) 如  $Q=0$ ，则  $\vec{p}$  与坐标原点的选择无关；
  - 2) 如  $Q=0$ ， $\vec{p}=0$ ，则  $Q_{ij}$  与坐标原点的选择无关。

# § 2.5 存在介质时静电场的基本定律

## 一、介质极化

### 介质或导体中的电荷：

- ▶ 可自由运动电荷，用 $\sigma$ 描述；
- ▶ 不可自由运动电荷或束缚电荷，用 $\varepsilon$ 和 $\mu$ 描述。  
(自由运动指宏观自由运动)

### 理想介质/绝缘介质/非导电介质/无损介质：

介质中没有可自由运动电荷。

理想介质： { 极化现象，用 $\varepsilon$ 描述；  
磁化现象，用 $\mu$ 描述。

# § 2.5 存在介质时静电场的基本定律

## 1、极化现象

微观结构尺度远小于宏观尺度。对微观尺度内的场可进行多极展开，然后进行宏观统计平均。

### 单极项：

- ▶ 单个分子：介质电中性  $\longrightarrow Q=0, \varphi_m=0$
- ▶ 统计平均：由电荷守恒定律可知，无论有无外加电场，结论亦然。

## § 2.5 存在介质时静电场的基本定律

### 偶极项:

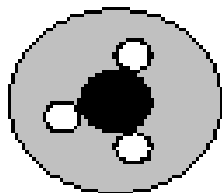
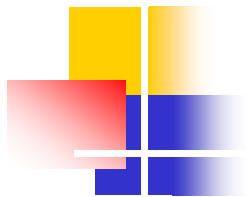
正、负电荷中心;

❖ 无极(性)分子/非极性分子: 分子内电荷分布均匀、对称、正负电荷中心重合的分子。

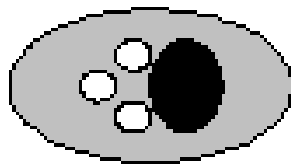
氢气( $\text{H}_2$ )、氧气( $\text{O}_2$ )、氮气( $\text{N}_2$ )、甲烷( $\text{CH}_4$ )、二氧化碳( $\text{CO}_2$ )。

❖ 有极(性)分子/极性分子: 分子内电荷分布不均匀、不对称、正负电荷中心不重合的分子。

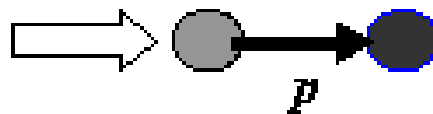
二氧化硫( $\text{SO}_2$ )、硫化氢( $\text{H}_2\text{S}$ )、氨气( $\text{NH}_3$ )、水( $\text{H}_2\text{O}$ )，有机酸，许多固体介质。



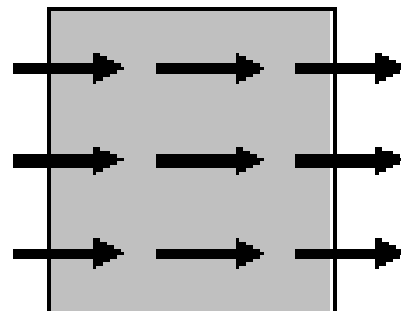
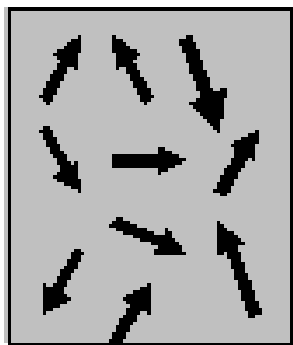
没有外场作用



外加电场



(a) 外场使正、负电荷中心发生位移，形成定向排列的电偶极矩



外加电场  $\longrightarrow$

(b) 外场使不规则的分布的固有电偶极矩，形成规则排列

	无外加电场		有外加外场		极化方式
	单个分子	统计平均	单个分子	统计平均	
无极分子	$\vec{p} = 0$	$\vec{p} = 0$	$\vec{p} \neq 0$	$\vec{p} \neq 0$	位移极化 /感应极化
有极分子	$\vec{p} \neq 0$	$\vec{p} = 0$	$\vec{p} \neq 0$	$\vec{p} \neq 0$	转向极化

# § 2.5 存在介质时静电场的基本定律

两种极化方式虽然微观过程不同，但在宏观上具有相同的效果，即在外加电场作用下，宏观统计平均的电偶极距不为零。

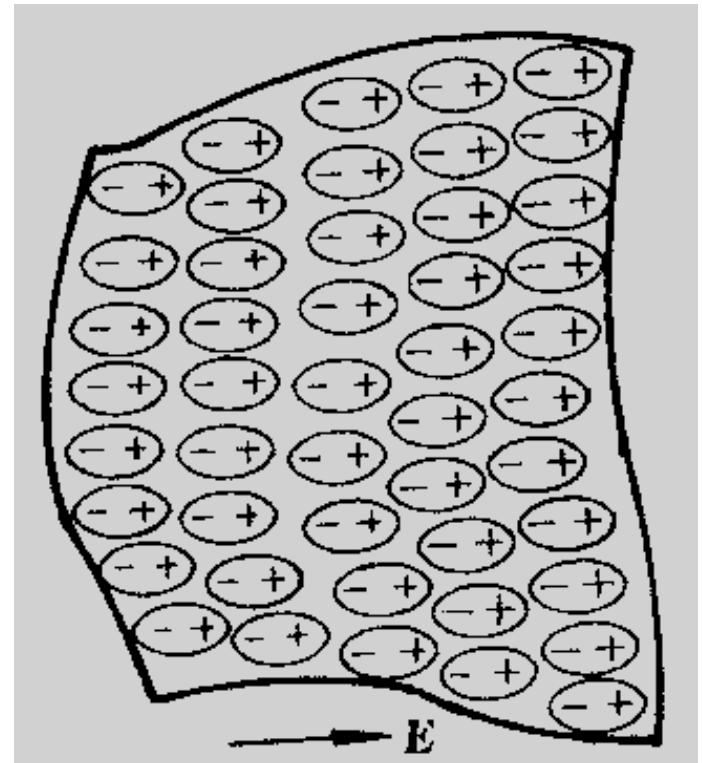
## 2、极化强度 $\vec{P}$

定义：

某点的极化强度为该点单位体积内的电偶极矩。

$$\vec{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta V} = \frac{d\vec{p}}{dV}$$

单位：库仑/米<sup>2</sup>，C/m<sup>2</sup>。



# § 2.5 存在介质时静电场的基本定律

## 3、极化电荷的概念

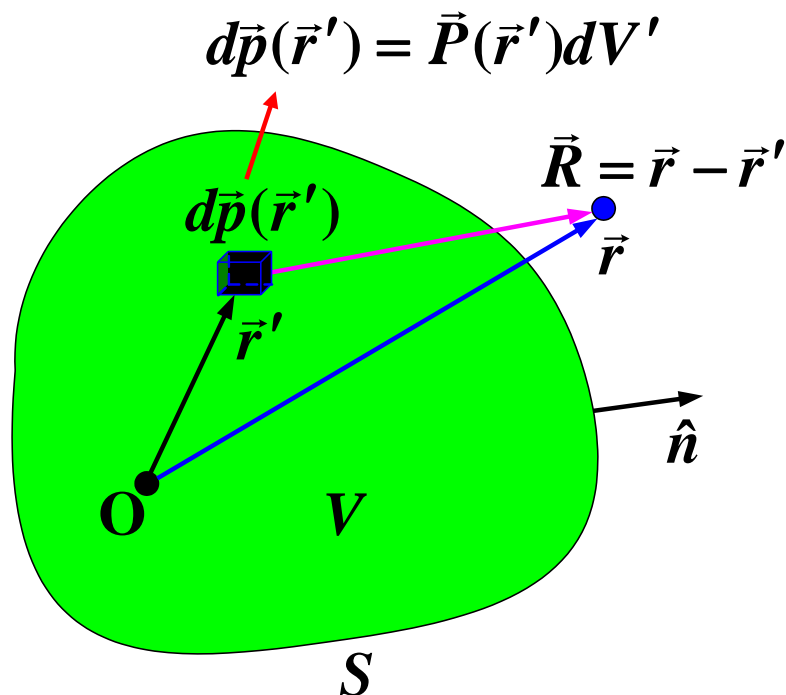
电偶极距分布产生的场:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\vec{P}(\vec{r}') \cdot \vec{R}}{R^3} dV'$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \vec{P}(\vec{r}') \nabla' \frac{1}{R} dV'$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \left\{ \nabla' \cdot \left( \frac{\vec{P}}{R} \right) - \frac{\nabla' \cdot \vec{P}}{R} \right\} dV'$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{-\nabla' \cdot \vec{P}}{R} dV' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\hat{n}' \cdot \vec{P}}{R} dS'$$



## § 2.5 存在介质时静电场的基本定律

定义:

$\rho_b(\vec{r}) = -\nabla \cdot \vec{P}(\vec{r})$  为 (等效) 体极化电荷密度;

$\rho_{sb}(\vec{r}) = \hat{n} \cdot \vec{P}(\vec{r})$  为 (等效) 面极化电荷密度。

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho_b}{R} dV' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\rho_{sb}}{R} dS'$$

介质电中性:

$$Q_s + Q_{sb} = \int_V \rho_b dV + \oint_S \rho_{sb} dS = 0$$

即极化电荷总量为零。



# § 2.5 存在介质时静电场的基本定律

## 二、存在介质时场的基本方程

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_f + \rho_b}{\epsilon_0} \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho_f \text{ —— 自由电荷体密度;} \\ \rho_b \text{ —— 等效极化电荷体密度。} \end{array} \right.$$

将  $\rho_b = -\nabla \cdot \vec{P}$  代入, 则

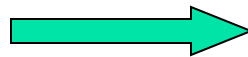
$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho_f$$

**f**ree charge  
**b**ound charge

定义电位移矢量  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_f$$

$$\nabla \times \vec{E} = \mathbf{0}$$



$$\vec{E} = -\nabla \phi$$

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho_f dV = Q_f$$

$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = \mathbf{0}$$

# § 2.5 存在介质时静电场的基本定律

## 三、本构关系与介质分类

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

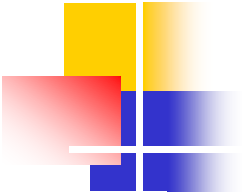
$\vec{D}$ 和 $\vec{E}$ 的关系称为本构关系。

本构关系实际上取决于 $\vec{P}$ 和 $\vec{E}$ 的关系。

非线性介质： $\vec{D}$ 和 $\vec{E}$ 为非线性关系。

线性介质： $\vec{D}$ 和 $\vec{E}$ 为线性关系。

$$\vec{P} = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} = \epsilon_0 \begin{bmatrix} \chi_{11} & \chi_{12} & \chi_{13} \\ \chi_{21} & \chi_{22} & \chi_{23} \\ \chi_{31} & \chi_{32} & \chi_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} = \epsilon_0 \tilde{\chi} \cdot \vec{E}$$



均匀介质:  $\chi_{ij}$  与空间坐标无关。

非均匀介质:  $\chi_{ij}$  与空间坐标有关。

各向同性介质:  $\chi_{ij} = \chi\delta_{ij}$ ,  $\vec{P} = \epsilon_0\chi\vec{E}$

$$\vec{D} = \epsilon_0(1 + \chi)\vec{E} = \epsilon_0\epsilon_r\vec{E} = \epsilon\vec{E}$$

$\chi$  —— 极化率

$\epsilon_r = 1 + \chi$  —— 相对介电常数

$\epsilon = \epsilon_0\epsilon_r$  —— 介电常数

各向异性介质:

$$\vec{D} = \epsilon_0(\vec{I} + \tilde{\chi}) \cdot \vec{E} = \epsilon_0\tilde{\epsilon}_r \cdot \vec{E} = \tilde{\epsilon} \cdot \vec{E}$$

$\tilde{\chi}$  —— 极化率张量

$\tilde{\epsilon}_r = \vec{I} + \tilde{\chi}$  —— 相对介电常数张量

$\tilde{\epsilon} = \epsilon_0\tilde{\epsilon}_r$  —— 介电常数张量

# § 2.5 存在介质时静电场的基本定律

## 四、介质交界处的边界条件

$$\begin{cases} \hat{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \rho_{sf} \\ \hat{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \mathbf{0} \end{cases}$$

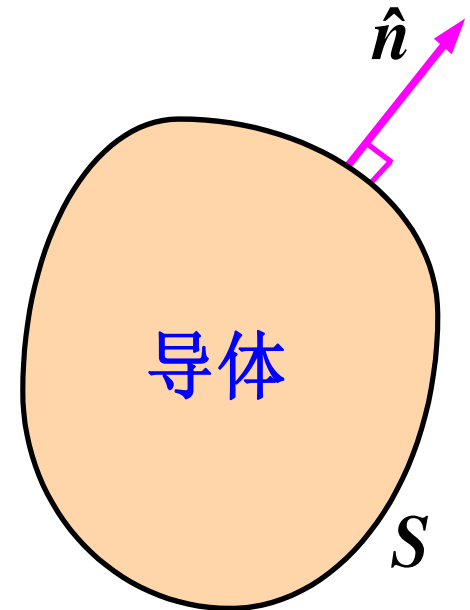
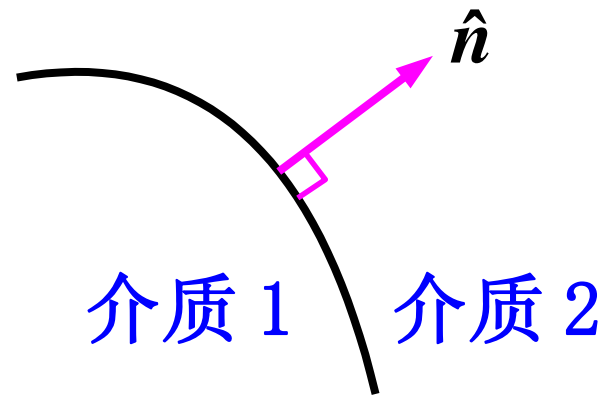
特别，在导体外表面：

$$\begin{cases} \hat{n} \cdot \vec{D} = \rho_{sf} \\ \hat{n} \times \vec{E} = \mathbf{0} \end{cases}$$

介质线性、  
各向同性

用电位表示：

$$\begin{cases} \varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} - \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = \rho_{sf} \\ \varphi_1 = \varphi_2 \end{cases}$$



## § 2.5 存在介质时静电场的基本定律

### 介质交界处的极化电荷:

$\vec{E}$  的法向分量通常是不连续的。若  $\rho_{sf} = 0$ ，则  $\vec{D}$  的法向分量连续，但  $\vec{E}$  的法向分量仍不连续。如果将存在介质时的静电场问题转换为真空中的静电场问题，则场由自由电荷和极化电荷共同产生，电力线只可能在电荷存在处中断或不连续，因此交界处  $\vec{E}$  的法向分量不连续必然伴随着自由或极化电荷的面分布，即：

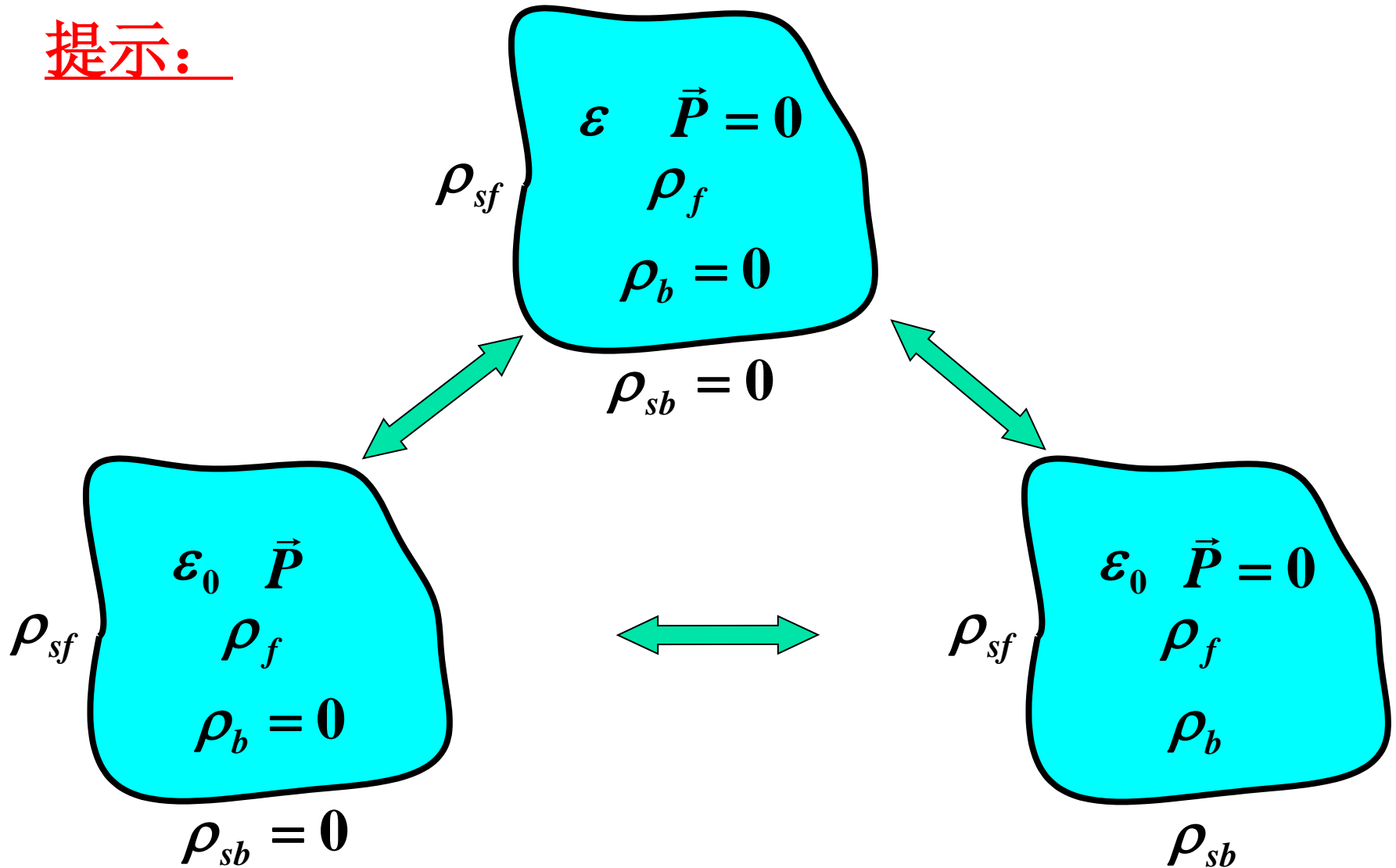
$$\hat{n} \cdot (\epsilon_0 \vec{E}_2 - \epsilon_0 \vec{E}_1) = \rho_{sf} + \rho_{sb}$$

由边界条件及  $\vec{D}$  的定义可得：

$$\rho_{sb} = \hat{n} \cdot (\vec{P}_1 - \vec{P}_2) = \rho_{s_1b} + \rho_{s_2b} \quad (\text{与前面结果一致})$$

# § 2.5 存在介质时静电场的基本定律

提示:



# § 2.5 存在介质时静电场的基本定律

## 五、介质极化的特点

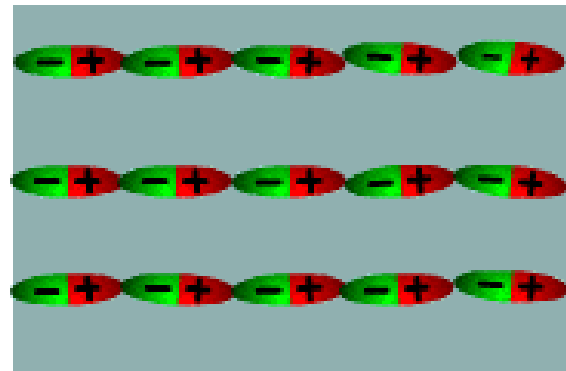
- 1、介质电中性，即极化电荷总量为零：

$$Q_s + Q_{sb} = 0$$

- 2、线性均匀各向同性介质的极化特点：  
极化电荷只存在于介质表面及介质内部自由电荷不为零的地方。

$$\begin{aligned}\rho_b &= -\nabla \cdot \vec{P} = -\nabla \cdot (\epsilon_0 \chi \vec{E}) \\ &= -\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \rho_f\end{aligned}$$

$$\rho_b + \rho_f = \frac{\rho_f}{\epsilon_r}$$



# § 2.5 存在介质时静电场的基本定律

## 存在介质时静电场问题的求解方法：

### 1) 直接积分法：

仅限于线性均匀各向同性无限大介质。

### 2) 高斯定理：

场的对称性、连续性、均匀性等分析：利用边界条件、介质极化的特点等。

### 3) 解泊松方程



## § 2.5 存在介质时静电场的基本定律

【例】：点电荷 $q_f$ 在线性均匀各向同性介质中的场

$$\vec{E} = \frac{q_f \vec{r}}{4\pi\epsilon r^3}, \quad \epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$$

电场强度变小，为真空中的 $1/\epsilon_r$ 。

原因：

# § 2.5 存在介质时静电场的基本定律

【例】：无限大平板电容器，已知二板之间距离及电压，求电场强度、自由电荷密度及极化电荷密度。

【解】：

$$D = \frac{2\varepsilon_0\varepsilon}{d(\varepsilon_0 + \varepsilon)} V_0$$

$$E_1 = D / \varepsilon_0 =$$

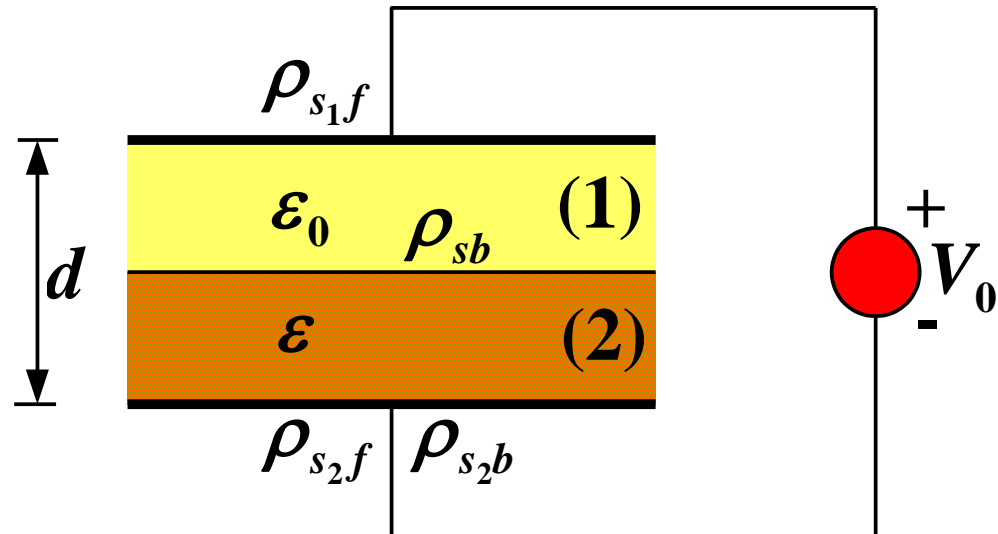
$$E_2 = D / \varepsilon =$$

$$\rho_{s1f} = D =$$

$$\rho_{s2f} = -D =$$

$$\rho_{sb} = -P_2 = -\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon} D =$$

$$\rho_{s2b} = P_2 =$$



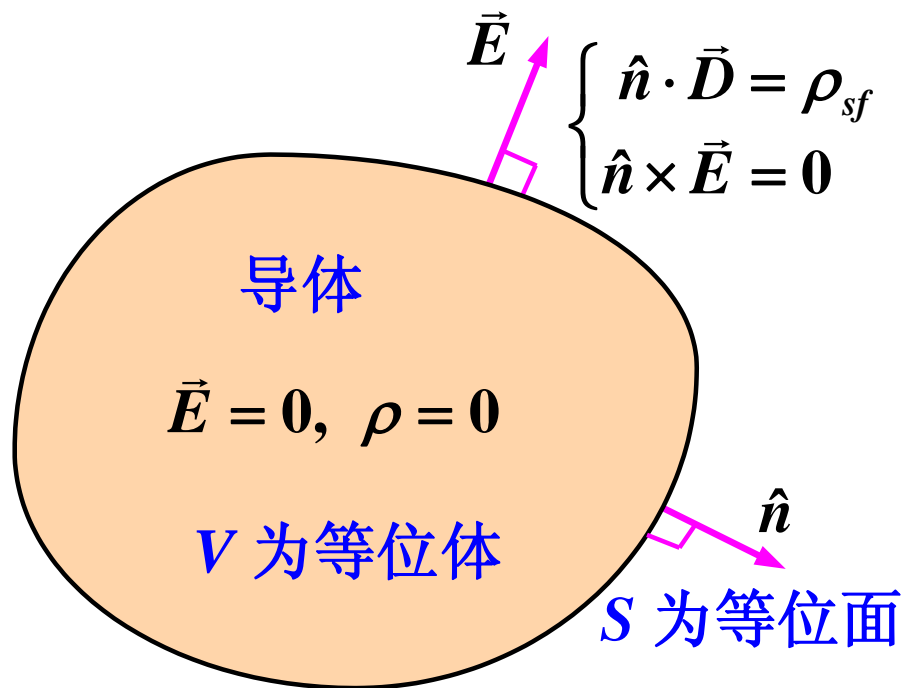
## § 2.6 静电场中的导体

### 一、基本概念

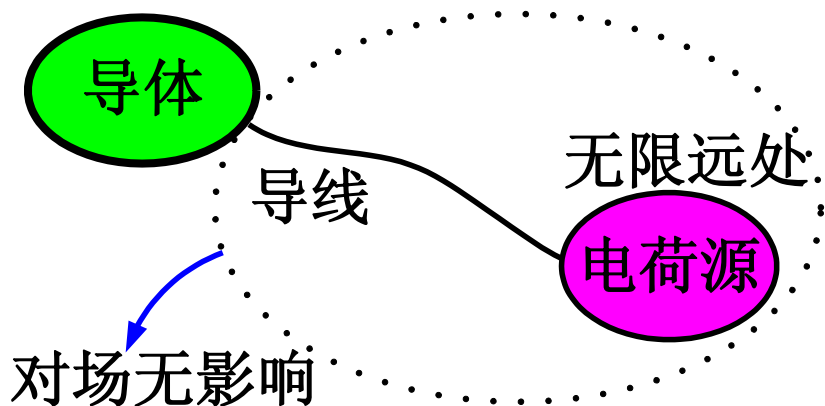
**导体：**具有可自由运动电荷的物质或材料。  
例如：金属，电解液。

**导体在静电平衡状态下的特性：**  
宏观统计平均，  
导体内部任何一点没有净电荷且  
电场强度为零。

**无限薄导体壳：**

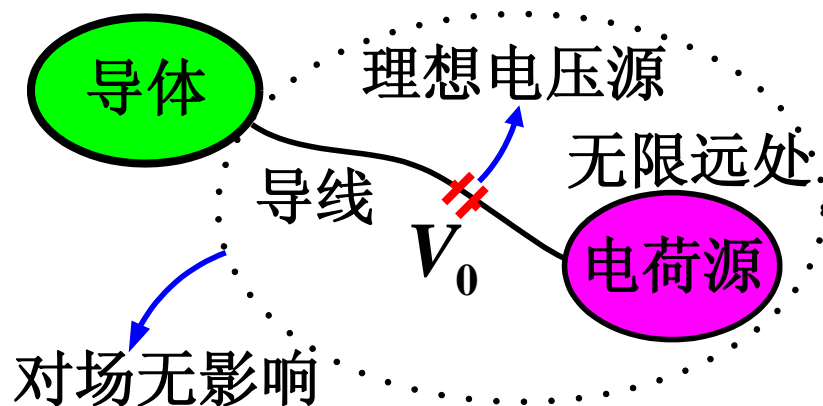


## § 2.6 静电场中的导体



导体接地

(理想化模型)



保持导体电位为  $V_0$

(理想化模型)

## § 2.6 静电场中的导体

### 二、导体系的电容

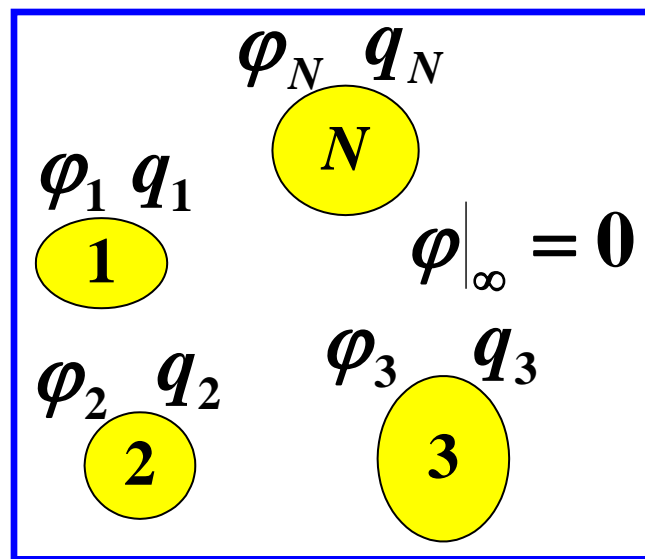
可证明各导体的电位和各个导体的总带电量之间有如下的线性关系：

$$\varphi_1 = p_{11}q_1 + p_{12}q_2 + \dots + p_{1N}q_N$$

$$\varphi_2 = p_{21}q_1 + p_{22}q_2 + \dots + p_{2N}q_N$$

$$\vdots$$

$$\varphi_N = p_{N1}q_1 + p_{N2}q_2 + \dots + p_{NN}q_N$$



写成矩阵为：

$$[\varphi] = [p][q]$$

其中， $[p]$ 称为**电位系数矩阵**， $p_{ij}$ 称为**电位系数**，仅与导体的几何形状、相对位置、介质分布有关。

## § 2.6 静电场中的导体

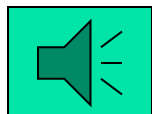
$p_{ij}$  的物理意义:

$$p_{ii} = \frac{\varphi_i}{q_i} \Big|_{q_k=0 (k=1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, N)} \quad \text{—— 自电位系数}$$

即  $p_{ij}$  等于第  $i$  个导体带电而其它导体均不带电时, 第  $i$  个导体上单位带电量在第  $i$  个导体上产生的电位。

$$p_{ij} = \frac{\varphi_i}{q_j} \Big|_{q_k=0 (k=1, 2, \dots, j-1, j+1, \dots, N)} \quad \text{—— 互电位系数 } (i \neq j)$$

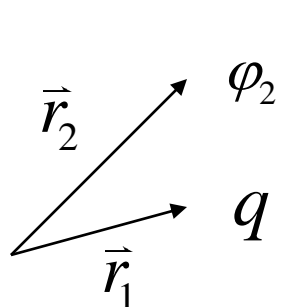
即  $p_{ij}$  等于第  $j$  个导体带电而其它导体均不带电时, 第  $j$  个导体上单位带电量在第  $i$  个导体上产生的电位。

 **注意:** 某导体带电与否仅指其总电量是否为零!

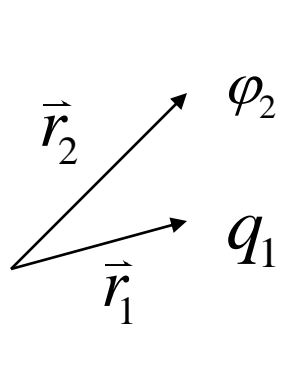
## § 2.6 静电场中的导体

性质：若介质线性各向同性，即  $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ ，则

$p_{ij} = p_{ji}$  — 互易性



$\vec{r}_2$   $\varphi_2$   $q$   $\varphi_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}$ ,  $\varphi_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$   
 $q$   $\varphi_1$   $\longrightarrow \varphi_2 = \varphi_1$   
 $\vec{r}_1$



$\vec{r}_2$   $\varphi_2$   $q_2$   $\varphi_2 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}$ ,  $\varphi_1 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$   
 $q_1$   $\varphi_1$   $\longrightarrow \frac{\varphi_2}{q_1} = \frac{\varphi_1}{q_2}$   
 $\vec{r}_1$

互易性反映了这种观察点和源点地位的对称性。

## § 2.6 静电场中的导体

$$[q] = [\beta][\varphi], \quad [\beta] = [p]^{-1}$$

$[\beta]$  —— 电容系数矩阵;  $\beta_{ij}$  —— 电容系数

$$\beta_{ii} = \frac{q_i}{\varphi_i} \Big|_{\varphi_k=0 (k=1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, N)} \quad \text{—— 自电容系数}$$

$\beta_{ii}$  等于除第  $i$  个导体外其它导体电位均为零即接地时, 第  $i$  个导体上单位电位在第  $i$  个导体上感应的带电量。

$$\beta_{ij} = \frac{q_i}{\varphi_j} \Big|_{\varphi_k=0 (k=1, 2, \dots, j-1, j+1, \dots, N)} \quad \text{—— 互电容系数 } (i \neq j)$$

$\beta_{ij}$  等于除第  $j$  个导体外其它导体电位均为零即接地时, 第  $j$  个导体上单位电位在第  $i$  个导体上感应的带电量。



## § 2.6 静电场中的导体

若介质线性各向同性，则  $\beta_{ij} = \beta_{ji}$  —— 互易性

$$\begin{aligned} q_i &= \sum_{j=1}^N \beta_{ij} \varphi_j = \sum_{j=1}^N \beta_{ij} (\varphi_j - \varphi_i + \varphi_i) \\ &= \left( \sum_{j=1}^N \beta_{ij} \right) \varphi_i - \sum_{j=1}^N \beta_{ij} (\varphi_i - \varphi_j) = C_{ii} \varphi_i + \sum_{j=1, j \neq i}^N C_{ij} (\varphi_i - \varphi_j) \end{aligned}$$

$C_{ij}$  —— 部分电容；

$C_{ii} = \left( \sum_{j=1}^N \beta_{ij} \right)$  —— 自部分电容；

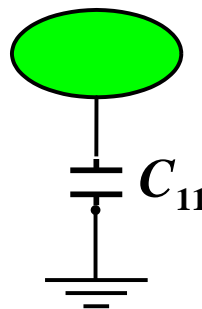
$C_{ij} = -\beta_{ij} \quad (i \neq j)$  —— 互部分电容

互易性：  $C_{ij} = C_{ji}$

## 单导体系统:

$$q = C_{11}\varphi = \beta_{11}\varphi$$

代表与地之间的电容

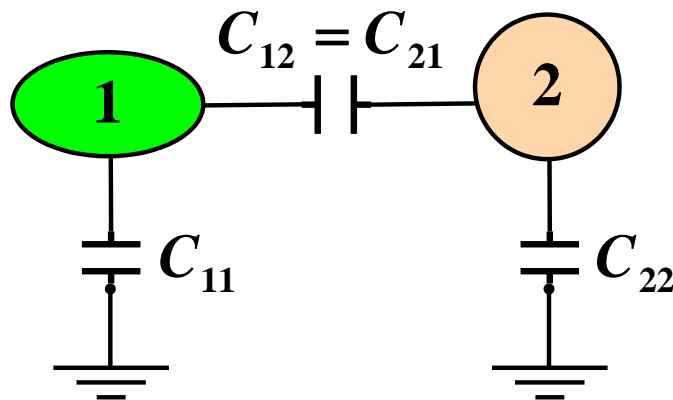


## 双导体系统:

$$q_1 = C_{11}\varphi_1 + C_{12}(\varphi_1 - \varphi_2)$$

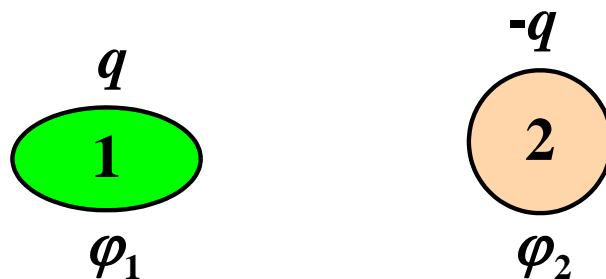
$$q_2 = C_{22}\varphi_2 + C_{21}(\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$= C_{22}\varphi_2 + C_{12}(\varphi_2 - \varphi_1)$$



## 电容器电容:

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = C_{12} + \frac{C_{11}C_{22}}{C_{11} + C_{22}}$$



可见：**电容器电容**可由部分电容串并联得到，**为二个导体之间的总电容。**

## § 2.7 静电场的能量

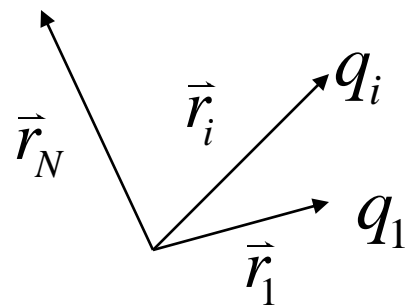
设电荷分布在有限区域。

### 一、真空中静电场的能量

点电荷的电位能或势能： $W = q\varphi$

离散分布：

$$W_i = q_i \bar{\varphi}_i = q_i \sum_{j=i+1}^N \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_j - \vec{r}_i|}$$
$$W = \sum_{i=1}^N W_i = \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_j - \vec{r}_i|} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_j - \vec{r}_i|} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \varphi_i$$



仅包括相互作用能。



## § 2.7 静电场的能量

连续分布: 
$$W = \frac{1}{2} \int_V \frac{\rho(\vec{r})\rho(\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|} dVdV' = \frac{1}{2} \int_V \rho(\vec{r})\varphi(\vec{r})dV$$

包括固有能量和相互作用能。

用电场强度表示: 
$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V |\vec{E}|^2 dV$$

单导体: 
$$W = \frac{1}{2} q\varphi = \frac{1}{2} C\varphi^2 = \frac{q^2}{2C}$$

电容器: 
$$W = \frac{1}{2} q(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{1}{2} C(\varphi_1 - \varphi_2)^2 = \frac{q^2}{2C}$$

多导体: 
$$W = \frac{1}{2} \sum_i q_i\varphi_i = \frac{1}{2} \sum_{i,j} p_{ij}q_iq_j = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \beta_{ij}\varphi_i\varphi_j$$

## § 2.7 静电场的能量

### 二、介质中静电场的能量

设介质线性。

$$\cancel{W = \frac{1}{2} \int_V (\rho_f + \rho_b) \varphi dV = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V |\vec{E}|^2 dV} \quad ?$$

$$W = \frac{1}{2} \int_V \rho_f \varphi dV = \frac{1}{2} \int_V \vec{D} \cdot \vec{E} dV$$

$\frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E}$  称为静电场的能量密度。

## § 2.7 静电场的能量

例：无限大介质中的孤立导体球

$$W = \frac{1}{2} q_f \varphi = \frac{q_f^2}{8\pi\epsilon a} \quad (\text{下降})$$

例：无限大介质中保持电位为  $V_0$  的导体球

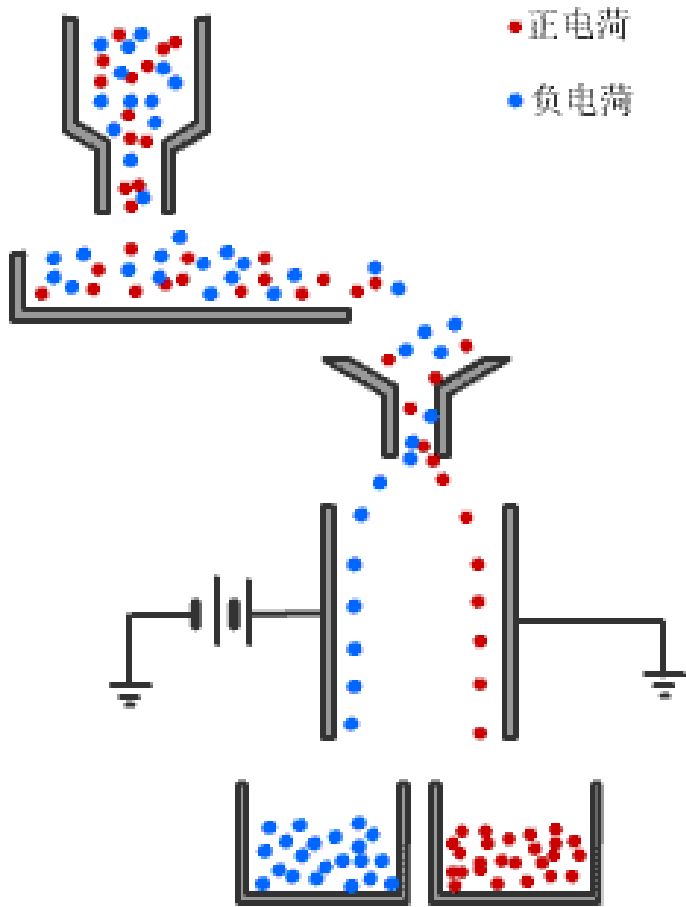
$$W = \frac{1}{2} q_f V_0 = 2\pi\epsilon a V_0^2 \quad (\text{增加})$$

永久性极化：

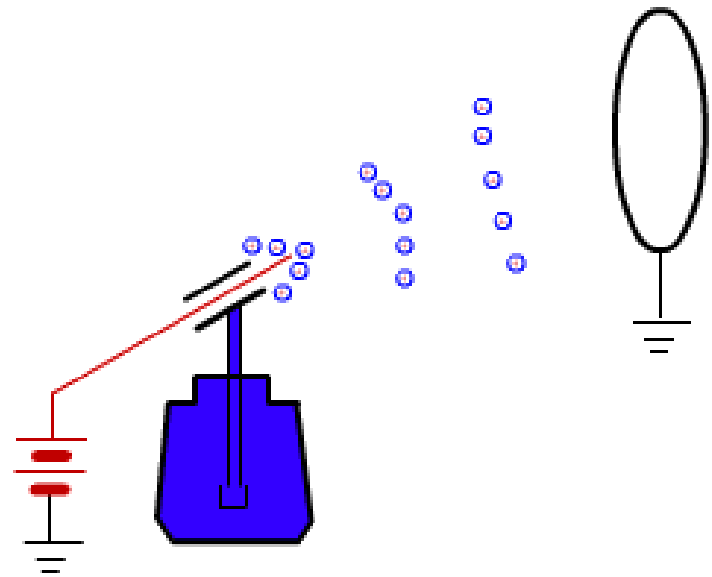
$$W = \frac{1}{2} \int_V (\rho_f + \rho_b) \varphi dV = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V |\vec{E}|^2 dV$$

## 本章小结

# 工程上，静电力有广泛的应用。



静电分离



静电喷涂